Singular elliptic operator の調和解析と不変ポテンシャル論(ポテンシャル論とその関連分野)

新井, 仁之

数理解析研究所講究録
1016巻 1997年 77-84

Singular elliptic operator の調和解析と不変ポテンシャル論

東北大・理　新井仁之 (Hitoshi Arai)

1　はじめに.

単位円板上のラプラシアンに関する古典的なポテンシャル論は，多くの研究者によって，リーマン面や複雑な境界をもつ高次元領域などに一般化されている．一方，ラプラシアンを，より一般の2階一様楕円型偏微分作用素，さらには退化の仕方が A_p 荷重で測れるような退化楕円型作用素に拡張する方向でも研究が進められている．

本稿では，単位円板ではなく，単位球上の不変調和関数に関するポテンシャル論をモデルにした特異楕円型偏微分作用素の解析について述べる．ここで，特異楕円型偏微分作用素 (singular elliptic operator) とは，境界のすべての点で退化が起こるような楕円型作用素のことである．また，この方向で一般化する際に現れる新しいタイプの問題点についても言及する．

2　単位球上のポテンシャル論

単位球上の Bergman 計量に関する Laplace-Beltrami 作用素に関するポテンシャル論は，1968年頃から A. Koranyi によって始められた．

$\mathbf{B}_n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| < 1\}$ とし,

$$g_B(z) = \sum_{j,k=1}^{n} g_{j\bar{k}}(z) dz^j d\bar{z}^k$$

を B_n の Bergman 計量とする. このとき, g_B のラプラシアンは

$$\Delta_B = \sum_{j\bar{k}} g^{j\bar{k}}(z) \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$$

と書ける. ただし, ここで $(g^{j\bar{k}})$ は $(g_{j\bar{k}})$ の逆行列である. 不変ポテンシャル論と古典的なポテンシャル論との違いの一つは, このラプラシアンの表象が, 境界上で複雑な様相で完全に退化してしまうことである. もう少し詳しく述べれば, 退化のオーダーが, 境界に近ずく方向によって異なっており, しかも, 境界上では係数がすべて 0 になっているのである. このことを具体的に見てみよう. Bergman 計量を求めることは, 一般にはできていないが, 単位球の場合は次のようになることが知られている:

$$g^{j\bar{k}}(z) = \frac{1}{n+1}(1 - |z|^2)\left[\delta_{jk} - \bar{z}_j z_k\right]. \tag{1}$$

このことから, $j = k$ の場合 $g^{j\bar{k}}(z)$ は $(1 - |z|)^2$ のオーダーで退化し, $j \neq k$ のとき, $1 - |z|$ のオーダーで退化していることがわかる. さらに, 適当な座標変換をしてみると, complex normal 方向から境界に近づくときには $(1 - |z|)^2$ のオーダーで, そして, complex tangential の方向から近づくときは, $1 - |z|$ のオーダーで退化していることもわかる.

ところで, 単位球上の不変ポテンシャル論をより一般の領域, たとえば, 強擬凸領域に一般化しようとすると, 単位球のときに通じた方法の多くが, 使えなくなる. たとえば, 単位球の場合, $\mathbf{B}_n$ から $\mathbf{B}_n$ の上への双正則写像全体からなる群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{B}_n)$ が推移的に作用しており, このことが, 不変ポテンシャル論の基本的な道具の一つになっている. 実際,「不変」という言葉は, $\mathrm{Aut}(\mathbf{B}_n)$ による作用で不変という意味であることからも, その重要性が見て取れる. しかし, 一般の強擬凸領域では, $\mathrm{Aut}(\mathbf{B}_n)$ が単位元だけからなる場合もあって, 単位球のときに使えた手法がそのままでは適用できない.

結局，不変ポテンシャル論をモデルにした解析を行うには，複雑な退化をする楕円型偏微分作用素を直接取り扱うという事態に直面するのである．ところが，偏微分方程式論でも，このような退化楕円型偏微分作用素の研究は，思ったほど進んでいないようである．そこで，われわれがなすべきこは，次の二つのテーマを研究することであることがわかる：

1. 強または弱擬凸領域上の不変ポテンシャル論.
2. 境界で退化する楕円型偏微分作用素のポテンシャル論.

ここでは，この二つのテーマについて，述べていきたい.

3 特異楕円型偏微分作用素のあるクラス.

まず，Bergman 計量のラプラシアンをモデルにして，ある楕円型偏微分作用素のクラスについて述べる.

$d+1$ 次元 Riemann 多様体 $(\mathcal{R},h)$ と $\mathcal{R}$ 内の C^∞ 級の有界領域 M を考える．∂M を M の境界とし，$\overline{M}=M\bigcup\partial M$ とする．まず，M 上の楕円型偏微分作用素で，その係数が ∂M 上で消えるものを定義したい．消え方は，単位球のときと同様，方向によって異なるようにする．そのため，∂M の近くに「方向」を定める．次の仮定は，そのためのものである.

仮定. 接束 $T\overline{M}|\partial M$ の C^∞ 部分束 $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ が存在し,

$$T\overline{M}|\partial M=\mathcal{T}_0\oplus\mathcal{T}_1$$

ただし，この分解は計量 h に関する直交分解である．また，$\mathcal{T}_0$ は法束を含んでいるものとする．m を $\mathcal{T}_0$ の階数とする.

さて，$D(x)$ を ∂M の近傍 V と M の共通部分で定義された正値関数で，$\lim_{x\to\partial M}D(x)=0$ なるものとする．たとえば，$\delta(x)$ を x と ∂M との h で測った距離を表す関数とするとき，$D(x)=\delta(x)^\alpha$, $\alpha>0$ などが考えたい例である．そして，$\mathcal{T}_0$ 方向に $\delta(x)^{-2}$ のオーダーで発散し，$\mathcal{T}_1$ 方向

には $D(x)^{-2}$ のオーダーで発散するような M 上のリーマン計量を (δ, D) 型計量ということにする．(δ, D) 型計量の厳密な定義を述べるためには，多くの微分幾何の概念を想起しなければないため，ここでは省略するが，詳しくは，[2] を参照してもらいたい．

たとえば，強擬凸領域の Bergman 計量は，C. Fefferman の結果 [6] より，(δ, D) 型計量であることが容易にわかる．また，有限形の弱議凸領域上の Nagel-Stein-Wainger 計量は，(δ, D) 型計量と考えることができる．ただし，D は type m の点の近くでは，$D \approx \delta^{1/m}$ なる関数である．その他の例は，[4] にリストがある．

以下では，g を M 上のある (δ, D) 型計量とし，つぎのような偏微分作用素を考える．

$$Lu = \mathrm{div}(A\nabla u) + \langle B, \nabla u\rangle \tag{2}$$

ただし，ここで div, ∇, $\langle\ ,\ \rangle$ はそれぞれ g に関する発散，勾配，内積を表し，$A \in L^\infty(M, End(TM))$, $B \in L^\infty(M, TM)$ であり，ある定数 $\gamma > 0$ が存在し，

$$\gamma\langle\xi,\xi\rangle \leq \langle A\xi,\xi\rangle \leq \gamma^{-1}\langle\xi,\xi\rangle \quad (x,\xi) \in TM \tag{3}$$

を満たしているものとする．

4 作用素の coercive 性．

作用素 L が coercive かどうかを見ておくことは重要である．L が coercive であるとは，ある正定数 c が存在し，すべての $u \in C_0^\infty(M)$ に対して

$$\int_M \{\langle A\nabla u, \nabla u\rangle - \langle uB, \nabla u\rangle\} dv_g \geq c\int_M \{\langle u, u\rangle + |u|^2\} dv_g, \tag{4}$$

が成り立つことである．ただし，dv_g は g に関する測度である．L が coercive のとき，(4) の成り立つような c の上限を $c(L)$ で表すことにする．

さて, 境界の近くの点 $x \in M$ に対して

$$E(x) = (d+1-m)\frac{\delta(x)}{D(x)} ND(x),$$

とおく．ただし，N は ∂M に関する h で測った外向きの法線微分を表す．この量 $E(x)$ は，われわれの解析では重要な役割を果たす．

定理 1 ([2]) $L_0 u = \mathrm{div}(A\nabla u)$ とする．もし, ある $\varepsilon > 0$ が存在し，境界の十分近くで

$$-(m+1)+\varepsilon \leq E(x), \tag{5}$$

が成り立っていれば, L_0 は coercive である．また, $\sup_{x\in M}\langle B_x, B_x\rangle < 2c(L_0)$ であれば, L も coercive である．

5 Martin 境界.

L の Martin 境界がどのようになっているかを調べておこう．以下，L は coercive であるとする．

$\alpha > 0$ に対して, $\zeta \in \partial M$ が α 点であるとは, ζ のある近傍 V とある正定数 C_ζ が存在して, $D(x) \leq C_\zeta \delta(x)^\alpha$ がすべての点 $x \in V \cap M$ に対して成り立つような点である．たとえば, 強擬凸領域の Bergman 計量の場合, 境界点はすべて 1/2 点である．α 点全体のなす集合を P_α とおく．

定理 2 ([2]; see also [1]) (1) $1/2 \leq \alpha \leq 1$ のとき, P_α は L の極小 Martin 境界の中に C^0-位相で埋め込むことができる．

(2) また, $\partial M = \cup_{1/2\leq\alpha\leq1} P_\alpha$ の場合は, M 上の恒等写像が $\overline{M}$ から M の L に関する Martin コンパクト化の上への同相写像に拡張でき，しかも Martin 境界のすべての点が極小になっている．

特に $\mathcal{R} = \mathbf{C}^n$ で M を有界強擬凸領域, そして g を Bergman 計量とする．この場合の定理 2 は [1] で証明したが，これは，強擬凸領域の Bergman Laplacian に関する Martin 境界に関して J. C. Taylor が Lect. Notes in Math. 1344 (1987) の中で提出した open problem に対する肯定的な解を与えている．

6 調和測度.

この節では，定理 2 の条件 (1) または (2) の条件を満たしているものとする．このとき 定理 2 より L-調和測度 ω_L^x が存在する．$o \in M$ を任意に取り，固定する．$\omega_L = \omega_L^o$ とおく．さて，$B_g(y,1)$ を中心 y 半径 1 の g に関する測地球であるとする．境界の近くの点 $x \in M$ に対して x から境界に計量 h に関して直交するような h の測地線を一意的に引くことができる．その測地線と境界との交点を $b(x)$ とおく．すると，十分小さな $R_0 > 0$ をとれば，$\zeta \in \partial M$ と $0 < t < R_0$ に対して

$$\Delta(\zeta,t) = \{b(x) : x \in B_g(\varphi(t,\zeta),1)\} \subset \partial M$$

が定義できる．次の定理が成り立つ．

定理 3 ([2]; see also [1]) ある正定数 C_1 が存在し，

$$\omega_L^x(\Delta(b(x),\delta(x))) \geq C_1 > 0,$$

が境界の近くのすべての $x \in M$ に対して成り立つ．

強擬凸領域上の Bergman 計量に基づいた設定の場合，この定理は [1] で証明したものであるが，それは Müller - Wolniewicz が Lect. Notes in Math. 1573, (1994)，10–11 で提出した open problem の肯定的な解答になっていた．

定理 3 を使うと調和測度の評価が得られるのだが，それを述べるために少し記号を準備する．$V(\partial M) \cap M$ 上の実数値関数 f に対して，$f_+(t) = \sup\{f(x) : \delta(x) = t\}$, $f_-(t) = \inf\{f(x) : \delta(x) = t\}$, $t > 0$．とする．$\omega_L(\Delta(\zeta,t))$ の評価として次が成り立つ:

定理 4 ([2]) $L = \Delta_g$ とする．各 $\zeta \in \partial M$ とすべての $t \in (0,R_0)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{C_2}\int_0^t \exp\left\{-\int_\lambda^1 (m-1+E_+(s))\,\frac{1}{s}ds\right\}\frac{1}{\lambda}d\lambda \\
&\leq \omega_L(\Delta(\zeta,t)) \\
&\leq C_2\int_0^t \exp\left\{-\int_\lambda^1 (m-1+E_-(s))\,\frac{1}{s}ds\right\}\frac{1}{\lambda}d\lambda,
\end{aligned}$$

ここで, C_2 は h, M, g, L にのみ依存した正定数である.

この定理の直接的な結果として次の結果を得る:

定理 5 ([2]; see also [1]) $\alpha \in [1/2, 1]$ とし, $D(x) = \delta(x)^\alpha$ とする. また, $L = \Delta_g$ であるとする. このとき ω_L と ∂M 上の h から導入される測度 $d\sigma$ とは互いに絶対連続である. さらに $d\omega_L/d\sigma$ と $d\sigma/d\omega_L$ は $d\sigma$ に関して本質的に有界である.

ここで, 古典解析からの類推によって, 興味深い問題が考えられる. それは, A がどの程度 I からずれると, ω_L と σ_h の絶対連続性がくずれるか, あるいは, $D(x)$ が $\delta(x)^\alpha$ とどのくらい離れると, それらの測度の絶対連続性がくずれるかということである. この問題は, 考える作用素が一様楕円型の場合には, Dahlberg, R. Fefferman らによって研究された (see [7]). しかし, 本論説で扱っている singular elliptic の場合には, 何もわかっていない.

このような研究を進める際には, Carelson 測度に関する議論が必要になるが, それについては, [5] でいくつかの結果が証明されている.

参考文献

[1] H. Arai, Degenerate elliptic operators, Hardy spaces and diffusions on strongly pseudoconvex domains, Tohoku Math. J. 17 (1994), 469–498.

[2] H. Arai, Degenerate elliptic operators, H^1 spaces and diffusions on strongly pseudoconvex domains, Geometric Complex Analysis (J. Noguchi et.al. ed), 1996, 35–42

[3] H. Arai, 多変数複素解析と調和解析, 数学, 印刷中.

[4] H. Arai, 実解析学の発展とその解析学への影響, 数学, 掲載予定.

[5] H. Arai, Singular elliptic operators and harmonic analysis of several complex variables, in preparation.

[6] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math. 26 (1974), 1–65.

[7] R. Fefferman, Some topics from harmonic analysis and partial differential equations, "Essays on Fourier Analysis in Honor of Elias M. Stein" Princeton Univ. Press 1995, 176–210.

[8] M. Stoll, Invariant Potential Theory in the Unit Ball of $\mathbf{C}^n$, Cambrigde Univ. Press, 1994.